32 相似な立体と表面積・体積

レッスン 5017 相似な立体の表面積・体積の比①

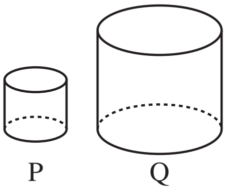
ポイント

- 1つの立体を，形を変えずに一定の割合で拡大，または縮小して得られる立体は，もとの立体と相似である

- 相似な2つの立体について，対応する部分の長さの比が $m:n$ ならば，相似比は $m:n$ となる。このとき，表面積と体積について次の比が成り立つ
  - 相似比 → $m:n$
  - 表面積比 → $m^2:n^2$ （2乗）
  - 体積比 → $m^3:n^3$ （3乗）

問題

右の図の円柱P，Qは相似である。円柱Pの底面の半径は5 cm，円柱Qの底面の半径は10 cmであるとき，次の問いに答えなさい。



(1) 円柱Pの表面積が $130\ \mathrm{cm}^2$ のとき，円柱Qの表面積を求めなさい。

(2) 円柱Pの体積が $100\ \mathrm{cm}^3$ のとき，円柱Qの体積を求めなさい。

解答

(1) 2つの円柱の相似比は

$$5:10=1:2$$

したがって，表面積の比は

$$1^2:2^2=1:4$$

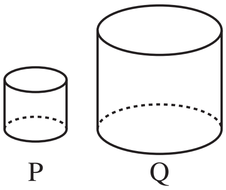
円柱Qの表面積を $x\ \mathrm{cm}^2$ とすると

$$130:x=1:4$$
$$x=520$$

よって

$520\ \mathrm{cm}^2$ …(答)

(1)



(2) 2 つの円柱の相似比は 1 : 2 だから，体積の比は

$$1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

円柱 Q の体積を y cm^3 とすると

$$100 : y = 1 : 8$$

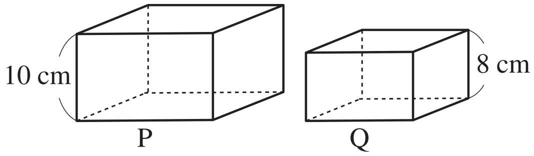
$$y = 800$$

よって

800 cm^3 …(答)

確認テスト　相似な立体の表面積・体積の比①

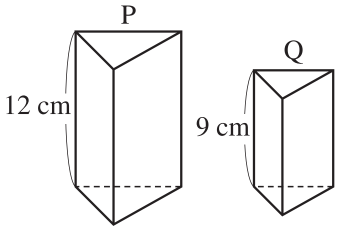
1　次の図の直方体 P，Q は相似である。直方体 P の高さが 10 cm，直方体 Q の高さが 8 cm であるとき，あとの問いに答えなさい。



(1) 直方体 P の表面積が 350 cm^2 のとき，直方体 Q の表面積を求めなさい。

(2) 直方体 P の体積が 750 cm^3 のとき，直方体 Q の体積を求めなさい。

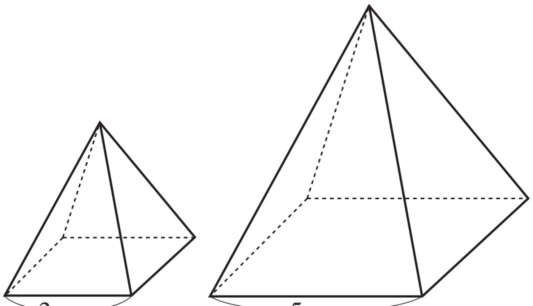
2　次の図の三角柱 P，Q は相似である。三角柱 P の高さが 12 cm，三角柱 Q の高さが 9 cm であるとするとき，あとの問いに答えなさい。



(1) 三角柱 P の表面積が 144 cm^2 のとき，三角柱 Q の表面積を求めなさい。

(2) 三角柱 Q の体積が 81 cm^3 のとき，三角柱 P の体積を求めなさい。

③ 次の図の正四角錐P，Qは相似である。正四角錐Pの底面の１辺が3 cm，正四角錐Qの底面の１辺が5 cmであるとき，あとの問いに答えなさい。



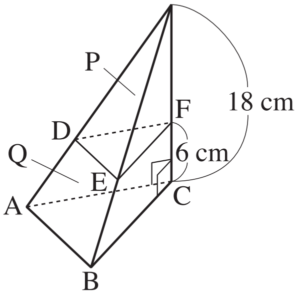
(1) 正四角錐Pの表面積が $117\ \text{cm}^2$ のとき，正四角錐Qの表面積を求めなさい。

(2) 正四角錐Pの体積が $54\ \text{cm}^3$ のとき，正四角錐Qの体積を求めなさい。

レッスン 5018 相似な立体の表面積・体積の比②

問題

次の図で，三角錐O-ABCの高さはOC = 18 cmである。この三角錐O-ABCを，右の図のように底面ABCに平行な平面DEFで，CF = 6 cmになるよう２つの立体P，Qに切り分けた。すると，立体Pの体積は $200\ \text{cm}^3$ になった。このとき，次の問いに答えなさい。

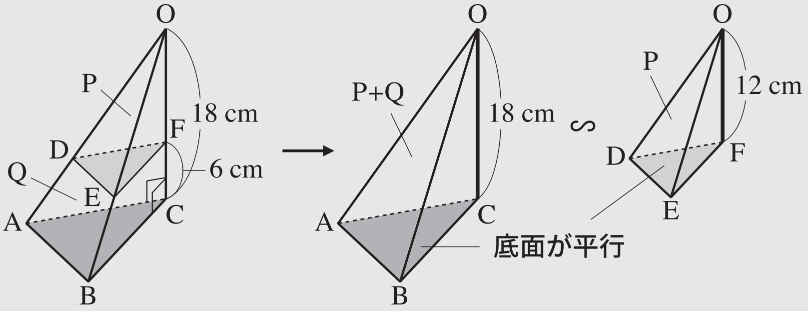


(1) 三角錐O-ABCと立体Pの，表面積と体積の比をそれぞれ求めなさい。

(2) 立体Qの体積を求めなさい。

ポイント

● 三角錐 O-ABC ∽ 三角錐 O-DEF だから，**対応する辺の比から相似比**を求める



解答

(1) 三角錐 O-ABC と立体 P は相似である。

対応する辺 OC，OF の比は

$18 : (18-6) = 18 : 12$

$= 3 : 2$

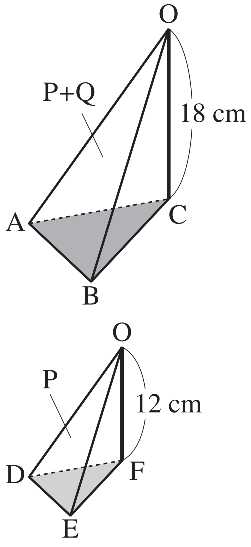
したがって，相似比は 3 : 2 である。よって，表面積の比は

$3^2 : 2^2 = \mathbf{9 : 4}$ …(答)

また，体積の比は

$3^3 : 2^3 = \mathbf{27 : 8}$ …(答)

(1)



(2) 立体 Q は，三角錐 O-ABC から立体 P を切り取ったものである。三角錐 O-ABC と立体 P の体積比は 27 : 8 だから，立体 P と立体 Q の体積比は

$8 : (27-8) = 8 : 19$

したがって，立体 Q の体積を x cm^3 とすると

$200 : x = 8 : 19$

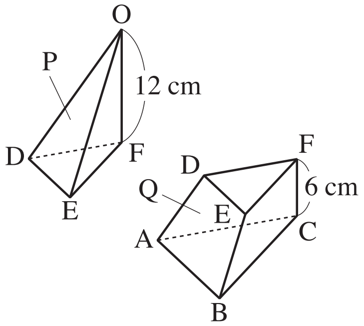
$8x = 200 \times 19$

$x = 475$

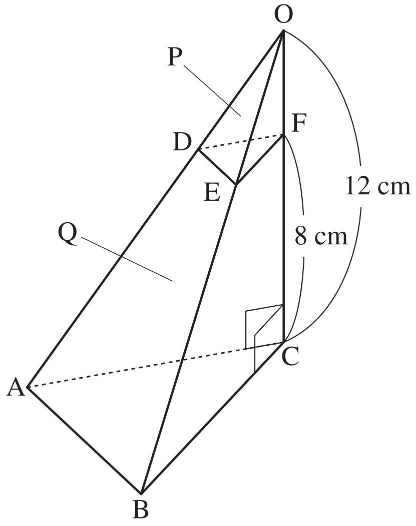
よって

475 cm³ …(答)

(2)



次の図で，三角錐 O-ABC の高さは OC ＝ 12 cm である。この三角錐 O-ABC を，底面 ABC に平行な平面 DEF で，CF ＝ 8 cm になるよう 2 つの立体 P，Q に切り分けた。すると，立体 P の体積は 10 cm^3 になった。このとき，あとの問いに答えなさい。



(1) 三角錐 O-ABC と立体 P の，表面積と体積の比をそれぞれ求めなさい。

(2) 立体 Q の体積を求めなさい。